DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN

TECNOLÓGICA INDUSTRIAL

DIRECCION TECNICA

SUBDIRECCION ACADEMICA

DEPARTAMENTO DE PLANES

Y

PROGRAMAS DE ESTUDIO

GEOMETRÍA ANALÍTICA

GUÍA DE ESTUDIO

***GENERALIDADES*:**

René Descartes, matemático y filósofo francés, presentó en su libro La Geometría, publicado en 1637, un recurso para unificar el estudio simultáneo del álgebra y de la geometría, y que se fundamenta en el uso de sistemas de coordenadas rectangulares.

La *"Geometría analítica es la rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas. "*

Los problemas fundamentales de la geometría analítica se podrían resumir así:

1. Dada una ecuación algebraica, construir su gráfica, es decir, interpretarla geométricamente (encontrar los lugares geométricos), y
2. Dada una figura geométrica o las condiciones que deben cumplir los puntos de la misma, determinar la ecuación algebraica correspondiente.

I. LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO.

COORDENAS RECTANGULARES DE UN PUNTO

El sistema de coordenadas rectangulares, se trazan dos rectas perpendiculares que se intersecan en el punto 0, al cual se le llama origen.

La recta horizontal es el eje de las abscisas o eje de las x; la recta vertical es el eje de las ordenadas o eje de las y.

Usando un segmento "unidad" conveniente, se divide cada eje de manera que los números enteros positivos queden a la derecha del origen sobre el eje x, y arriba del origen sobre el eje y.

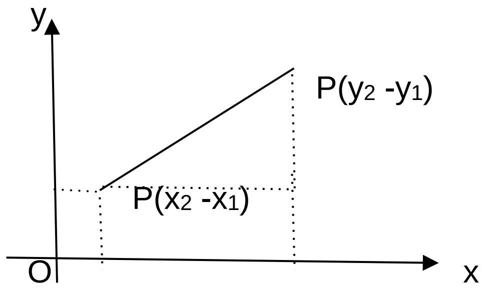
Los enteros negativos quedan a la izquierda del origen sobre el eje x, y abajo del origen sobre el eje y.

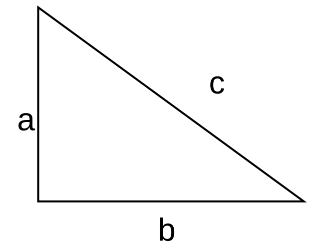
A la abscisa y a la ordenada de un punto se les llaman coordenadas del punto y se escriben como un par de números dentro de paréntesis separados por una coma; el primero de estos números representa siempre a la abscisa y el segundo a la ordenada. P = (x, y)

1.- Graficar en un mismo plano los siguientes puntos.

A) (-5,-1)	D) (0,-8)
B) (-4,6)	E) (9,-2)
C) (1/8, 5/2)	F) (1.25,-0.8)

II. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS Y PUNTO MEDIO.





Trazamos por P_1 una paralela a XX' y por P_2 otra paralela a YY'. Estas se cortan en $R(x_2,y_1)$, formándose el triángulo rectángulo P_1RP_2. El cual podemos calcular la recta mediante el Teorema de Pitágoras.

Para calcular la distancia entre dos puntos la fórmula es:

$C^2 = a^2 + b^2$

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(\overline{OR} - \overline{OP_1}\right)^2 + \left(\overline{QP_2} - \overline{QR}\right)^2$$

$$D^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula además de permitirnos obtener la distancia entre dos puntos, nos capacita para solucionar entre otros, los siguientes problemas:

* Determinar el perímetro de un triángulo o de algunas otras figuras geométricas.
* Comprobar que un triángulo es rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a las distancias obtenidas al verificar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
* Comprobar que un triángulo es isósceles, si dos de las distancias obtenidas son iguales.
* Comprobar que un triángulo es equilátero, si sus tres lados son iguales.

Ejemplo:

Determinar la distancia entre los puntos A (5,-4) y B (-3,2)

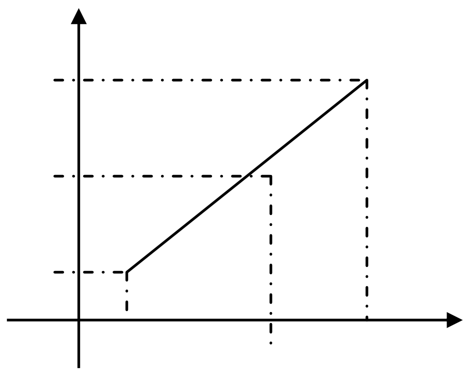
$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-5)^2 + (2-(-4))^2} =$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

2.- Determinar la distancia entre los siguientes puntos

A) (12, -4) Y (-3, 9)
B) (-5, 0) Y (0,7)
C) (-15,12) Y (-3.4, 5.9)
D) (10,8) Y (1.2, 0)
E) (-2, 6) Y (0,0)

PUNTO MEDIO.



Para la bisección de un segmento de recta, las fórmulas son:

$$X_M = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad Y_M = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

Ejemplo:
Localizar el punto medio de la recta $\overline{AB}$; A (-1,4) y B (5,3)

Pmx= $\frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ Pmy= $\frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

3.- Localizar el punto medio, así como su grafica de cada una de las rectas.

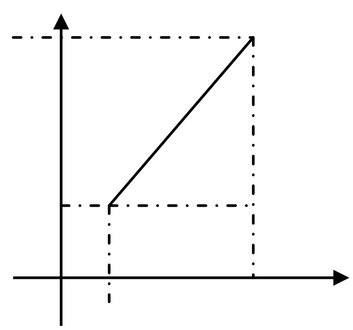
A) (9,10) ; (-8,-6)
B) (-1,3) ; (5,-4)
C) (0, 7) ; (-2, 11)
D) (-11, 0) ; (4.5, -6)
E) (2,-1) ; (1,7)

III. PENDIENTE Y ÁNGULO DE INCLINACIÓN.

La inclinación de la recta se conoce como pendiente de la recta (m), la cual forma un ángulo ∝ con respecto al eje de las x. La función trigonométrica tangente nos permite expresar el ángulo en grados sexagesimales. La fórmula es:

$$Tg\alpha = \frac{cat.opuesto}{cat.adyacente} \qquad m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m = Pendiente ∝ = ángulo de inclinación



La función tangente es positiva para ángulos del primer cuadrante, que comenzamos en cero para ángulos a 0° , y crece en forma continua hasta que en el ángulo de 90° su valor se expresa con + ∞ en donde cambia de signo a -∞ par ser negativa en el segundo cuadrante, cuyo valor se obtiene con el ángulo relacionado que se expresa.

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan \alpha$$

Debemos considerar que:

1. La pendiente de toda recta paralela al eje x es 0
2. Una recta que forma un ángulo entre 0° $<$ ∝ $<$ 90°
3. Una recta paralela al eje y no tiene pendiente.
4. si la recta forma un ángulo obtuso con el eje de las x, la pendiente es negativa.

Ejemplo:
Calcular la pendiente de la recta A (5,0) ; B (-1,9) y el ángulo de inclinación.

$$m = \frac{9-0}{-1-5} = \frac{9}{-6} = -1.5 \qquad \tan\alpha = \tan^{-1}(-1.5) = -56.3099 + 180° = 123°41'25''$$

Calcular la pendiente de la recta A (3,1); B (5,2) y el ángulo de inclinación.

$$m = \frac{2-1}{5-3} = \frac{1}{3} = 0.3\bar{3} \qquad \tan\alpha = \tan^{-1}(0.3\bar{3}) = 18.4349 =$$ 18° 26’6”

4.- Graficar y calcular la pendiente de las rectas determinadas por los siguientes puntos:

A) (5, 8) (0,0)
B) (6, -1) (9,12)
C) (-4, 0) (3,7)
D) (-2, -6) (5, -1)
E) (0, -3) (7, 4)

5.- Graficar y calcular el ángulo de inclinación de las rectas, determinadas por los puntos:

A) (3,-5) (-8, 1)
B) (4, 0) (9, -7)
C) (0,0) (-5,8)
D) (2,-1) (-3, 5)
E) (-3,1) (-9, 10)

IV. LUGAR GEOMÉTRICO

El lugar geométrico es el punto o conjunto de puntos que satisfacen una o varias condiciones.

Para determinar el lugar geométrico que corresponde a cada ecuación tenemos los pasos siguientes:

a) Despejar la ecuación en alguna de sus variables;
b) Tabular las variables (con mínimo 5 valores);
c) Asignar valores arbitrarios a la variable no despejada;
d) Sustituir los valores en la ecuación despejada;
e) Colocar los valores encontrados del paso anterior;
f) Graficar en el orden de la tabulación y unir los puntos.

Ejemplo:
Expresa el lugar geométrico de la ecuación 3x –y –2 =0.
Despejando: Y = -3x + 2

Tabulando:

X					
y					

Asignar valores:

X	-2	-1	0	1	2
Y					

Sustituir:

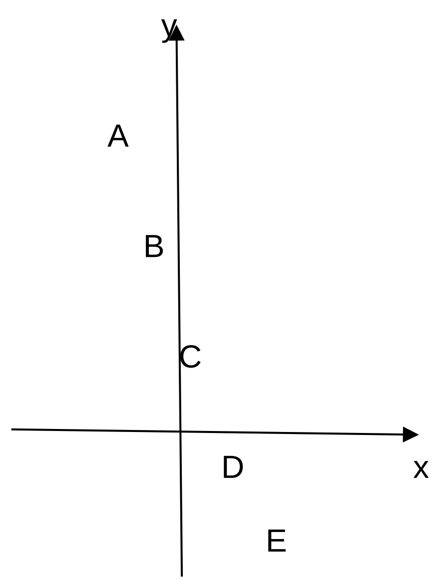
$Y = -3(-2)+2$ $y = -3(-1)+2$ $y = -3(0)+2$ $y = -3(1)+2$

$6 + 2$ $3+2$ $0 +2$ $-3 + 2$

8 5 2 -1

Así queda la tabla

	A	B	C	D	E
X	-2	-1	0	1	2
y	8	5	2	-1	-4



6.- Hallar el lugar geométrico de cada una de las siguientes ecuaciones:

A) $6X + 2Y = 0$
B) $X – 10Y + 8 = 0$
C) $-2X + 5Y - 4 = 0$
D) $15X – Y +15 = 0$
E) $-7X + 8Y – 6 = 0$

V. ECUACION DE LA RECTA.

Ax + By + C es un polinomio de una función lineal, y al igualarlo a cero obtenemos la ecuación de la recta en su forma general.

PUNTO PENDIENTE.
La relación para obtener la ecuación de la recta dadas las coordenadas de un punto y el valor de la pendiente es:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

Ejemplo:
Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (-3 , 4) y una pendiente de 2.

$$y - 4 = 2(x - (-3))$$
$$y - 4 = 2(x + 3)$$
$$y - 4 = 2x + 6$$
$$-2x + y - 4 - 6 = 0$$
$$-2x + y - 10 = 0$$

Ejemplo:
Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (-1,0) y una pendiente de 1/3.

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - (-1))$$
$$y = \frac{1}{3}(x + 1)$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{3}x + y - \frac{1}{3}$$

7.- Encontrar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones suficientes.

A) PASA POR (-2, 2) y m = -3
B) PASA POR (0, 6) y m = 4 / 6

C) PASA POR (5,-1) y m = 2
D) PASA POR (4, -7) y m = - 7/ 9
E) PASA POR (-8,-3) y m = 1

ECUACION CON DOS PUNTOS.
La relación para obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Ejemplo:
Determinar la ecuación que pasa por los puntos A (-2,4) y B (3,-1).

$$y-4=\frac{-1-4}{3-(-2)}(x-(-2))$$

$$y-4=\frac{-1-4}{3+2}(x+2)$$

$$y-4=\frac{-5}{5}(x+2)$$

$$y-4=-1(x+2)$$

$$y-4=-x-2$$

$$x+y-4+2=0$$

$$x+y-2=0$$

8.- Calcular la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

A) (-4,1) (6,3)
B) (-1,-6) (9,-5)
C) (0, 6) (-2, -1)
D) (0,0) (1, 5)
E) (7, 10) (-10, 8)

ECUACIÓN Y ABSCISA
La abscisa del punto donde la recta corta al eje x se llama intersección con x o abscisa al origen.

La ordenada del punto donde la recta corta al eje y se llama intersección con y u ordenada al origen.

La relación para obtener la ecuación de la recta en la que tenemos como datos la pendiente y la intersección con el eje y, es:

$$y = mx + b$$

Ejemplo:
Determinar la ecuación que tiene una pendiente 3 y una intersección a 2.

$$y = 3x + 2$$

Determinar la ecuación que tiene una pendiente de $\frac{2}{5}$ y una intersección de 3.

$$y = \frac{2}{5}x + 3$$

9.- Determina la ecuación de la recta con los siguientes datos:

A) m = 6 y ordenada al origen –2
B) m = 4/10 y ordenada al origen 9
C) m = -5/3 y ordenada al origen 0

VI. INTERSECCIÓN ENTRE DOS RECTAS.

El punto de intersección entre dos rectas es un lugar geométrico donde x e y tienen el mismo valor para ambas rectas: utilizando métodos para soluciones de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas se obtiene el punto de intersección.

Ejemplo:
Determina el punto de intersección dadas las ecuaciones:
5x – 12y + 4 = 0 3x + 4y –20 = 0

Por el método de suma y resta; se multiplica la ecuación dos por 3 para eliminar a Y.

$$3(3x + 4y - 20) = 9x + 12y - 60$$

Se suma o resta la ecuación uno y la ecuación dos:

$$\begin{array}{l} 5x - 12y + 4 \\ \underline{9x + 12y - 60} \\ 14x - 56 \end{array}$$

$$x = \frac{56}{14} = 4$$

Sustituyendo el valor de x en la ecuación uno.

$$y = \frac{-5x-4}{12} = \frac{-5(4)-4}{12} = \frac{-20-4}{12} = \frac{-24}{12} = -2$$

Por lo tanto el punto de intersección es (4, -2)

Determina el punto de intersección dadas las ecuaciones:

$$5x + y = 0 \qquad x + 5y - 24 = 0$$

Por el método de igualación, primero se despeja una variable.

$$y = -5x \qquad y = \frac{-x+24}{5}$$

se igualan las ecuaciones despejadas.

$$y = -5x = \frac{-x+24}{5}$$

se despeja la otra variable

$$-5x = \frac{-x+24}{5}$$

$$(5)-5x = -x + 24$$

$$-25x + x = 24$$

$$-24x = 24$$

$$x = \frac{24}{-24} = -1$$

sustituyendo el valor de x en la ecuación despejada

$$y = -5x$$
$$y = -5(-1) = 5$$
$$y = \frac{-(-1)+24}{5} = \frac{1+24}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Por lo tanto el punto de intersección es (-1,5)

10.- Dadas las ecuaciones de dos rectas, determinar el punto de intersección de cada una de ellas.

A) 5x – 2y + 4 = 0	-2x + 4y –10 = 0
B) 3x + 2y + 6 = 0	2x - 5y + 13 =0
C) –x + 6y – 5 = 0	4x – y + 7 = 0
D) x – 8y + 12 = 0	6x + 3y – 9 = 0
E) 14x – y = 0	-9x + 4y + 1 = 0

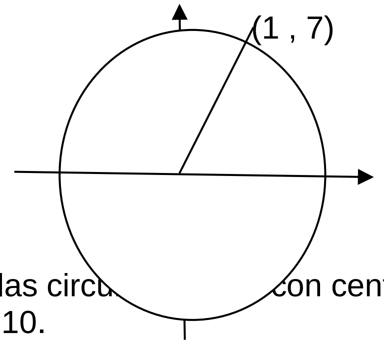
VII. CIRCUNFERENCIA

La circunferencia en es lugar geométrico donde todos los puntos equidistan de uno llamado centro. Para graficar una circunferencia basta utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos, tomando esta distancia como la magnitud del radio y cualquier punto de la circunferencia. Tomando como el centro de la circunferencia el origen en el plano cartesiano, la fórmula será:

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo:
Determina el radio de la circunferencia que tiene centro en el origen con un punto equidistante en (1, 7)

$r = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 7.07$



11. Grafica las circunferencias con centro en el origen.
    a) r = 10.
    b) r = 5.

12. Determinar el radio de las circunferencias con centro en el origen y graficar con los siguientes datos:

a) (4, -1)
b) (-5,9)
c) (0,6)
d) (-1,-3)
e) (-2, 0)

La ecuación de la circunferencia que tiene centro en el origen se iguala a cero y se sustituye el valor del radio, quedando su fórmula:

$x^x + y^2 - r^2 = 0$

Ejemplo:
Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y con un punto equidistante en (3,4)

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$x^2 + y^2 - 5^2 = 0$
$x^2 + y^2 - 25 = 0$

Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y de radio 3

$x^2 + y^2 - 3^2 = 0$
$x^2 + y^2 - 9 = 0$

13. Determina la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el origen de los siguientes ejercicios:

a) (-7,1)
b) (5,-2)
c) con r = 6
d) con r = 4
e) (-6,-3)

La circunferencia que tiene centro en otro punto, sin ser el centro del plano, se denominan (h,k) en el plano, sobre el eje de las x' y sobre eje de las y' respectivamente, la forma de la ecuación es $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$; la fórmula para determinar el radio es :

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

y de ahí:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

desarrollando los binomios:

$$r^2 = x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2$$

ordenando la ecuación la formula es :

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Ejemplo:
Determina la ecuación de la circunferencia con centro en (2, 9) y radio 6

$$x^2 + y^2 - 2(2)x - 2(9)y + (2)^2 + (9)^2 - (6)^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x + 18y + 4 + 81 - 36 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x + 18y + 49 = 0$$

Determina la ecuación de la circunferencia con centro en (-1,5) y un punto equidistante en (4,-3)

$$r = \sqrt{(4-(-1))^2 + (-3-5)^2}$$

$$r = \sqrt{(5)^2 + (-8)^2} =$$

$$r = \sqrt{25+64} =$$

$$r = \sqrt{89} = 9.43$$

$$x^2 + y^2 - 2(-1)x - 2(5)y + (-1)^2 + (5)^2 - (9.43\ )^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 + 25 - 89 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y - 63 = 0$$

14.- Determina la ecuación y gráfica de las siguientes circunferencias con los datos:

A) C = (1, -4); RADIO 5
B) C = (4, -7); RADIO 7
C) C = (-7,-1); RADIO 3
D) C = (0, -6) y el punto equidistante a = (8,4)
E) C = (2,8) y el punto equidistante a = (-1,-6)

El Lugar Geométrico de la circunferencia se determina despejando la formula general de la circunferencia, donde se hallará el valor de h , de k y el radio.

Ejemplo:
Obtener las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 9 = 0$ si la fórmula es $x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + y^2 - r^2 = 0$
Despejamos el valor de h y k

$$-2xh = -10x$$

$$-2h = -10$$

$$h = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$-2yk = 16y$$

$$-2k = 16$$

$$k = \frac{16}{-2} = -8$$

ya obtenidos los valores de h y k , despejamos la formula para obtener el valor del radio

$$h^2 + k^2 - r^2 = 9$$
$$(5)^2 + (-8)^2 - r^2 = 9$$
$$25 + 64 - r^2 = 9$$
$$89 - 9 = r^2$$
$$80 = r^2$$
$$\sqrt{80} = r$$
$$8.94 = r$$

al obtener el valor del radio y de las coordenadas del centro ya podemos graficar.

15.- Obtener las coordenadas del centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

A) $X^2 + Y^2 - 5X + 10Y - 6 = 0$
B) $X^2 + Y^2 - 8X - 9Y = 0$
C) $X^2 + Y^2 + 14X - 6Y + 13 = 0$
D) $X^2 + Y^2 - X + 4Y - 1 = 0$
E) $X^2 + Y^2 + 7X + 8Y - 16 = 0$

LA PARABOLA

Es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto fijo y de una recta fija.

El punto fijo se llama foco, y la recta fija directriz.

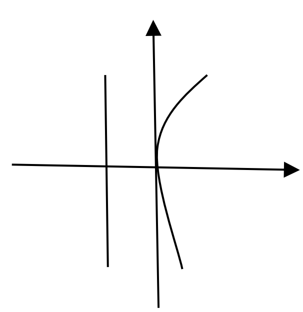
El vértice de la parábola es el punto medio del eje de simetría y se llama parámetro y se representa por 2p, en algunos textos sólo por p.

La cuerda que pasa por el foco, siendo perpendicular al eje de simetría, se llama lado recto o ancho focal de la parábola.

Para la ecuación de la parábola, con vértice en el origen y cuyo eje de simetría coincide con uno de los ejes coordenados; se deben considerar las cuatro posiciones siguientes:

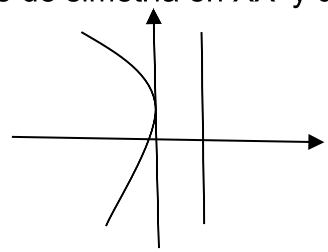
1. Vértice en el origen, eje de simetría en XX' y dirección OX.

$$y^2 = 4px$$



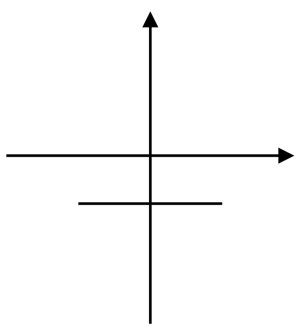
2. Vértice en el origen, eje de simetría en XX’ y dirección OX’.

$y^2 = -4px$



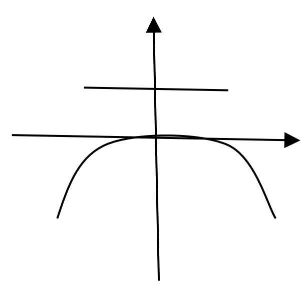
3. Vértice en el origen, eje de simetría en YY’ y dirección OY.

$x^2 = 4py$



4. Vértice en el origen, eje de simetría en YY’ y dirección OY’.

$x^2 = -4py$



CONCLUSIÓN:
El término x^2 o y^2 nos indica si la parábola es horizontal o vertical: si es x^2 es vertical, y si es y^2 es horizontal.

El signo de p señala hacia dónde está abierta la parábola; si es positiva, arriba o a la derecha; si es negativa, abajo o a la izquierda.

El segmento que une dos puntos de la parábola se llama cuerda; la que pasa por el foco es la cuerda focal.

Ejemplo:

De la ecuación $y^2 = 8x$ obtén las coordenadas del foco y del vértice, las coordenadas de los extremos del lado recto y su longitud, y la ecuación de la directriz; bosqueja la gráfica correspondiente.

La ecuación $y^2 = 8x$ es
de la forma $y^2 = 4px$

por lo cual es una parábola horizontal con el vértice en el origen, que se abre a la derecha; además:

$$4p = 8$$
$$p = 2$$
$$F\ (2,0) \quad y \quad V\ (0,0)$$

Longitud del lado recto:

$$4p = 4(2) = 8$$

coordenadas de los extremos del lado recto:

$$L\ (2,4) \quad y\ R\ (2,-4)$$

Ecuación de la directriz:

$X = -2$

16.- Determina las coordenadas del foco y de los extremos del lado recto, y la ecuación de la directriz, y bosqueja la gráfica correspondiente de cada una de las parábolas siguientes:

A) $y^2 = 8x$
B) $y^2 = -16x$

C) $x^2 = -9y$
D) $x^2 = 5y$

LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos siempre es constante y menor que la distancia entre los focos.

F1 , F2	focos
L	eje focal
V1, V2	vértices; puntos donde la hipérbola corta al eje focal.
F1F2	Distancia focal; segmento comprendido entre los focos.
V1V2	eje transverso; segmento comprendido entre los vértices.
C	Centro; punto medio del eje transverso.
B1B2	eje conjugado; segmento comprendido entre B1 y B2
LR	lados rectos de la hipérbola, uno de cada foco; su longitud es el ancho focal.
P	es un punto cualquiera de la curva con coordenadas (x,y)

1.-Hallar la ecuación de la hipérbola de foco $F(4,0)$, de vértice $A(2,0)$ y de centro $C(0,0)$.

Como el centro y el vértice se encuentran sobre el eje horizontal, entonces la ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Calculamos el valor de a, el cual es igual a la distancia del centro a uno de sus vértices

$$a = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = 2$$

2Calculamos el valor de c, el cual es igual a la distancia del centro a uno de sus focos

$$c = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = 4$$

3Calculamos el valor de b

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

3La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

II).- Hallar la ecuación de la hipérbola de foco $F(0,5)$, de vértice $A(0,3)$ y de centro $C(0,0)$

Como el centro y el vértice se encuentran sobre el eje vertical, entonces la ecuación es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Calculamos el valor de a, el cual es igual a la distancia del centro a uno de sus vértices

$$a = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2} = 3$$

2Calculamos el valor de c, el cual es igual a la distancia del centro a uno de sus focos

$$c = \sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2} = 5$$

3Calculamos el valor de b

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

3La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

EJERCICIOS

A).-Hallar la ecuación de la hipérbola de foco $F(7,2)$, de vértice $A(5,2)$ y de centro $C(3,2)$.

B).-Hallar la ecuación de la hipérbola de foco $F(-2,5)$, de vértice $A(-2,3)$ y de centro $C(-2,-5)$.

ELIPSE

Es el **lugar geométrico** de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

Elementos de la elipse:

1Focos: Son los puntos fijos F y F'.

2Eje focal: Es la recta que pasa por los focos.

3Eje secundario: Es la mediatriz del segmento FF'.

4Centro: Es el punto de intersección de los ejes.

5Radios vectores: Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: PF y PF'.

6Distancia focal: Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud **2c**, **c** es el valor de la semidistancia focal.

7Vértices: Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.

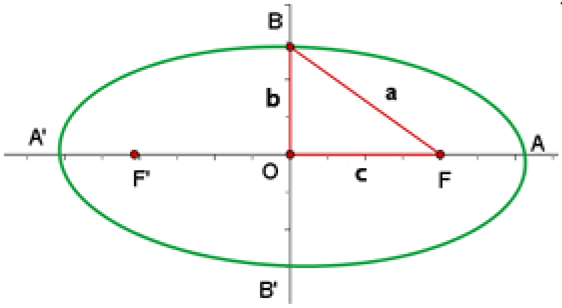
8Eje mayor: Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud **2a**, **a** es el valor del semieje mayor.

9Eje menor:Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud **2b**, **b** es el valor del semieje menor.

10Ejes de simetría: Son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.

11Centro de simetría: Coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.

Relación entre la distancia focal y los semiejes



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidad

$$e = \frac{c}{a} \qquad c \leq a \qquad 0 \leq e \leq 1$$

Es un número que mide en **mayor o menor achatamiento** de la elipse. Y es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

Ecuación reducida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si **el eje principal está en el de abscisas** se obtendrá la siguiente ecuación:

Las coordenadas de los focos son:

F'(−c, 0) y F(c, 0)

Elipse con los focos en el eje OY

Si **el eje principal está en el de ordenadas** se obtendrá la siguiente ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Las coordenadas de los focos son:

F'(0, −c) y F(0, c)

Elipse con eje paralelos a OX y centro distinto al origen

Si el centro de la elipse **C(x_0,y_0)** y el eje principal es paralelo a OX, los focos tienen de coordenadas F(X_0+c, y_0) y F'(X_0-c, y_0). Y la ecuación de la elipse será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Donde **A y B tienen el mismo signo**.

Elipse con eje paralelo a OY y centro distinto al origen

Si el centro de la elipse **C(x_0,y_0)** y el eje principal es paralelo a OY, los focos tienen de coordenadas F(X_0, y+c) y F'(X_0, y_0−c). Y la ecuación de la elipse será:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Donde **A y B tienen el mismo signo**.

Representa gráficamente y determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes elipses.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

Eje mayor

La ecuación de la elipse ya está en forma canónica por lo que procedemos a obtener el valor del semieje mayor

$a^2=16$ $\qquad\qquad$ $a=4$

Y así encontrar los vértices que forman el eje mayor

$A(4,0)$ $\qquad\qquad$ $A'(-4,0)$

2 Eje menor

Entonces el valor del semieje menor es

$b^2=12$ $\qquad\qquad$ $b=2\sqrt{3}$

Por lo tanto, los vértices que se encuentran en el eje menor son

$B(0,2\sqrt{3})$ $\qquad\qquad$ $B'(0,-2\sqrt{3})$

BIBLIOGRAFÍA:
Garza, B. (1998) Matemáticas III, Geometría Analítica. México: DGETI-SEP
García, M., Vega, M. y Porcayo, M. (2013) Geometría Analítica. México: Edit. Esfinge.

FUENTES DIGITALES:

https://youtu.be/cUN7Io8OGxs
https://es.khanacademy.org/math/basicgeo/basic-geo-coord-plane/coordinateplane-quad-1/v/graphing-points-exercise